Introdução a Análise Real

Daniel Frederico Lins Leite

2015/09/19

Sumário

[Topologia do Espaço Euclidiano 3](#_Toc430766310)

[O Espaço Euclidiano 3](#_Toc430766311)

[Produto Interno 3](#_Toc430766312)

[Propriedades do Produto Interno 3](#_Toc430766313)

[Comutatividade 4](#_Toc430766314)

[Distributatividade Vetorial 4](#_Toc430766315)

[Distrivutatividade Escalar 4](#_Toc430766316)

[Ortogonalidade 4](#_Toc430766317)

[Norma 5](#_Toc430766318)

[Propriedades da Norma 6](#_Toc430766319)

[Teorema de Pitágoras 6](#_Toc430766320)

[Desigualdade de Schwarz 6](#_Toc430766321)

[Provas **Erro! Indicador não definido.**](#_Toc430766322)

# Topologia do Espaço Euclidiano

## O Espaço Euclidiano

O espaço euclidiano n-dimensional é representado por e é formado por todas as n-tuplas de números reais que não representadas por . Quando se fala do espaço euclidiano estas n-tuplas também são chamadas de pontose/ou vetores.

A seguintes operações entre tuplas são:

Deste modo:

Deste modo qualquer tupla pode ser escrita na forma:

Onde

### Produto Interno

O espaço euclidiano ainda possui uma operação chamada de produto interno:

#### Propriedades do Produto Interno

#### Comutatividade

#### Distributatividade Vetorial

#### Distrivutatividade Escalar

#### Ortogonalidade

Se x e/ou y forem zero o caso trivialmente é provado. Porém, caso

Isso significa que toda tupla do espaço euclidiano possui pelo menos uma outra tupla que é ortogonal a esta.

Desse modo, z pode ser escrito por:

Isto significa que (y, podem descrever qualquer vetor do espaço o que os fazem serem a base do espaço. Mais sobre bases a frente.

### Norma

Sendo :

E sendo a fórmula

Podemos chamar de “Norma de X”:

Mais genericamente, toda função pode ser chamada como norma.

Caso a tupla/vetor possua norma 1, se diz que está normalizado, que é um vetor unitário. Pode-se normalizar qualquer tupla/vetor diferente de zero do seguinte modo:

#### Propriedades da Norma

Por esta definição a norma possui as seguintes propriedades

Exemplo:

#### Teorema de Pitágoras

Se analisarmos o Teorema de Pitágoras, na sua forma do espaço euclidiano:

Como

Como , , então

Como

#### Desigualdade de Schwarz

Pela propriedade da base do espaço euclidiano é possível escrever

sendo e

Utilizando o Teorema de Pitágoras

Substituindo

Logo

Substituindo

logo

Invertendo temos que

#### Norma

Dada a propriedade da norma

Elevando ambos lados ao quadrado temos:

Porém:

Aplicando a Desigualdade de Schwarz:

#### Norma Euclidiana

Caso a função |x| for declarada como

#### Norma do Máximo

#### Norma da Soma

#### Comparação entre as Normas Euclidianas, Máximo e Soma

Dada estas definições, podemos provar que:

A prova pode ser repartida em:

Deste modo, necessariamente

A segunda parte é:

Elevando os dois lados ao quadrado

Pelo Regra do Quadrado da Soma

Logo

Como:

Então temos que de fato

A terceira parte é provar que:

Onde

Ou seja

Como então temos que a inequação é sempre verdade.

Com isso temos que:

O que nos leva a concluir que, de fato,

#### Propriedade da Norma

Outra propriedade da norma é

Para esta prova são precisos dois passos. Primeiro:

Pelas propriedades básicas da norma

Tirando a norma dos dois lados, temos que:

#### Norma Euclidiana como Distância

Dentro de uma interpretação geométrica mais clássica, a Norma Euclidiana pode ser interpretada como a distância entre dois pontos.

### Bolas e Conjuntos Limitados

Uma bola aberta pode ser definida como:

Uma bola fechada pode ser definida como:

Uma esfera pode ser definida como:

De modo que

Também pode ser chamado de Disco. De particular interesse é o disco B[0;1] que é chamado de disco unitário.

Uma notação específica existe também para a esfera unitária: